

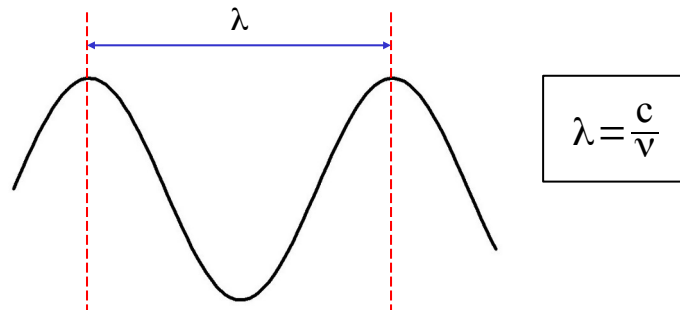


Lezione 1

La radiazione di corpo nero

Questa unità contiene informazioni sulle proprietà del corpo nero, fondamentali per la comprensione dei meccanismi di emissione delle sorgenti astronomiche, e un breve riassunto storico sul percorso seguito dagli scienziati per giungere ad alcune fra le scoperte più importanti di sempre.

L'onda elettromagnetica

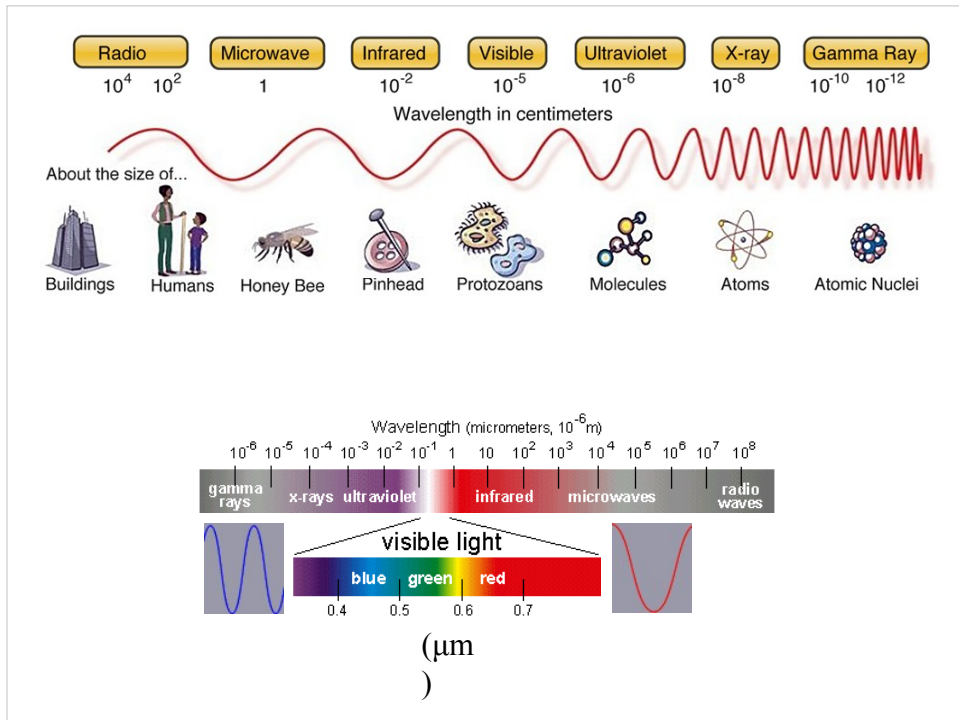


λ = lunghezza d'onda

ν = frequenza

c = velocità della luce = 300000 km/s

E' noto che la luce, o radiazione elettromagnetica, si propaga sottoforma di onde. Un'onda è caratterizzata da due parametri legati fra loro: la lunghezza d'onda (λ), definita come la distanza fra due "creste" o massimi di oscillazione, e la frequenza (ν), definita come il numero di oscillazioni al secondo. Queste due quantità sono legate dalla velocità della luce nel vuoto che vale circa 300 000 km/s, in modo tale che onde corte corrispondono a onde ad alta frequenza e onde lunghe corrispondono a onde a bassa frequenza.



La figura in alto illustra lo spettro elettromagnetico, che si estende dalle onde radio caratterizzate da grande lunghezza d'onda e bassa frequenza, fino ai raggi gamma caratterizzati da lunghezza d'onda molto corta e altissima frequenza. Sotto sono riportati degli esempi per capire le dimensioni fisiche corrispondenti alla lunghezza d'onda della radiazione nelle varie finestre dello spettro elettromagnetico.

Come si vede nella figura in basso, l'intervallo di lunghezza d'onda corrispondente alla luce cosiddetta visibile. Con il termine **visibile** intendiamo l'intervallo compreso fra circa 0.3 e 0.8 micron, che è quello percepito dal nostro occhio.

Il corpo nero

Esperienza:

un corpo solido freddo non produce alcuna emissione, ma al crescere della temperatura comincia a diventare **luminoso** e a cambiare **colore**

Esempio:

un metallo che diventa incandescente cambia il suo colore e diventa prima rosso, poi arancione, e infine di un giallo-bianco abbagliante



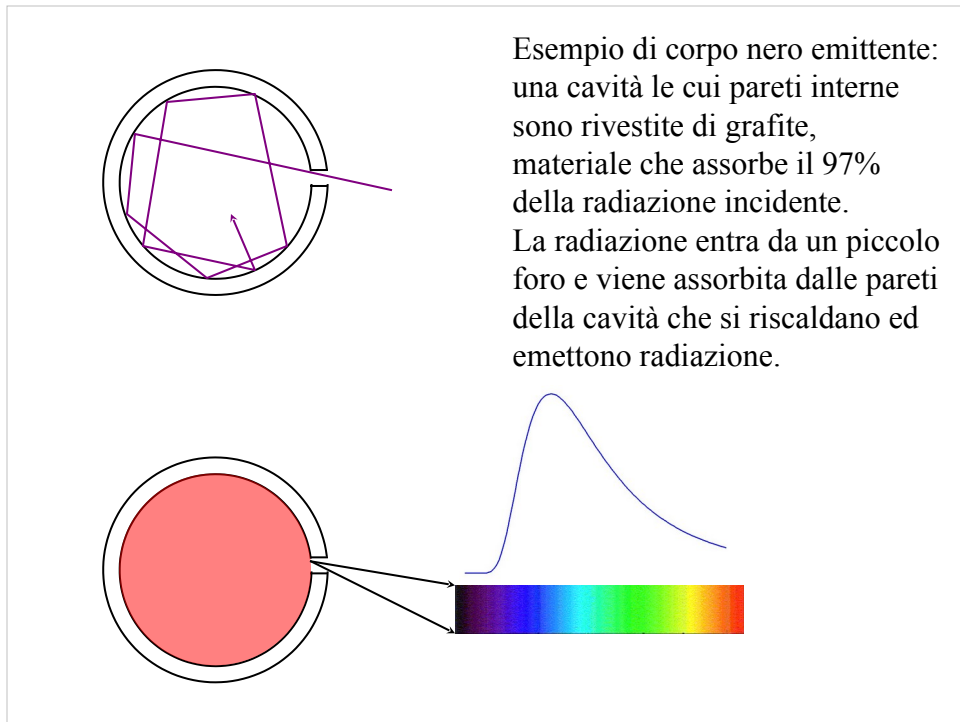
Un **corpo nero** è un oggetto **teorico** che assorbe il 100% della radiazione che incide su di esso. Perciò non riflette alcuna radiazione e appare perfettamente nero.

Un corpo nero ad una temperatura superiore allo zero assoluto **emette** radiazione.

L' **energia emessa** è totalmente **isotropa** e dipende solo dalla **temperatura** del corpo e non dalla sua forma o dal materiale di cui è costituito.

L'energia emessa da un corpo nero ad una certa temperatura T viene chiamata :

radiazione di corpo nero



Un corpo nero può essere simulato utilizzando una cavità le cui pareti interne sono rivestite di grafite, un materiale capace di assorbire fino al 97% della radiazione incidente. Un piccolo foro nella cavità permette alla radiazione di entrare. La radiazione viene riflessa dalle pareti e infine assorbita riscaldando la cavità, che a quel punto emette radiazione che esce dal foro.

Se analizziamo l'intensità di questa radiazione uscente in funzione della lunghezza d'onda tramite uno spettrografo, osserviamo che ha la forma del grafico riportato in figura.

Funzione di Planck

Lo spettro emesso da un corpo nero a temperatura T è riprodotto dalla **funzione di Planck**.

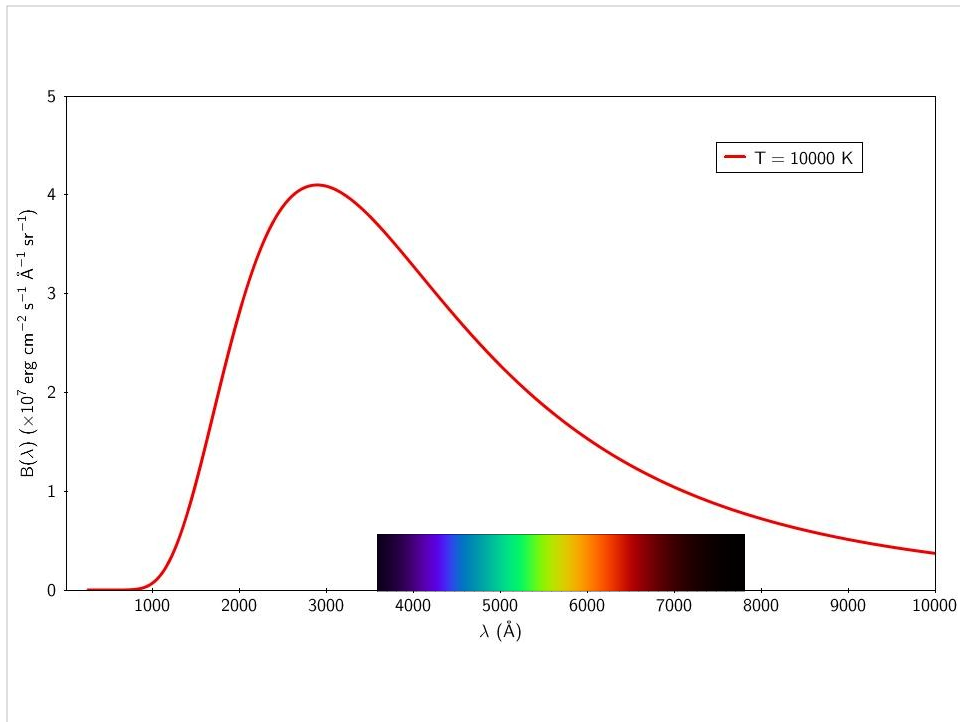
$$B(\lambda) = \frac{1.193 \times 10^{27}}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{1.439 \times 10^8}{\lambda T}} - 1} \quad \text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ erg} &= 10^{-7} \text{ J} \\ 1 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} &= 10^3 \text{ W m}^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &\text{ in } \text{\AA} \\ T &\text{ in K} \end{aligned}$$

La funzione di Planck dipende dall'inverso della quinta potenza della lunghezza d'onda e dal termine esponenziale al denominatore che contiene a sua volta la lunghezza d'onda e la temperatura del corpo.

B è la potenza per unità di superficie, unità di lunghezza d'onda e unità di angolo solido. E' anche chiamata brillantezza o intensità specifica della radiazione di corpo nero.



Questo grafico rappresenta l'andamento della funzione di Planck per un corpo nero a temperatura $T=10000 \text{ K}$. In ascissa ci sono la lunghezza d'onda in unità di Ångstrom e in ordinata il valore dell'intensità in unità di $10^7 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1} \text{ sr}^{-1}$.

Come si nota, la funzione di Planck ha un massimo di emissione molto ben definito, con l'intensità che cresce molto rapidamente alle lunghezze d'onda più corte e diminuisce più lentamente alle lunghezze d'onda maggiori.

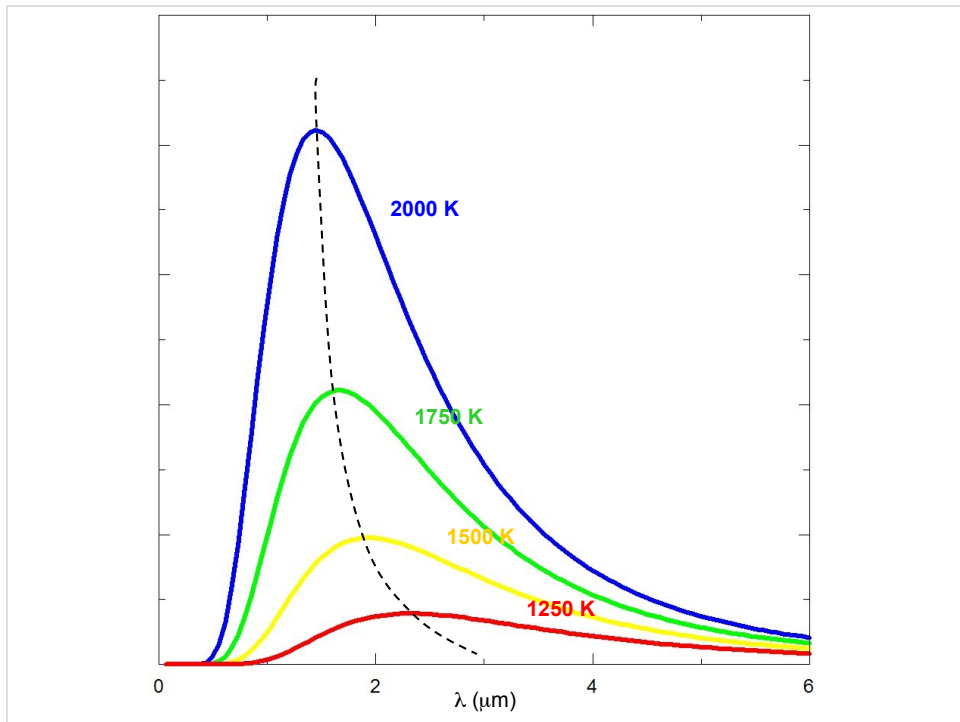
In basso è riportato lo spettro visibile. In questo caso l'emissione di corpo nero picca nel vicino UV e si estende nel IR.

Legge di Wien

Lo spettro di emissione del corpo nero mostra un **massimo di energia** ad una certa lunghezza d'onda ($\lambda_{\max}$).

All'**aumentare** della temperatura T del corpo, la lunghezza d'onda del massimo di emissione **decresce**.

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \times 10^7}{T} \text{ (\AA)}$$



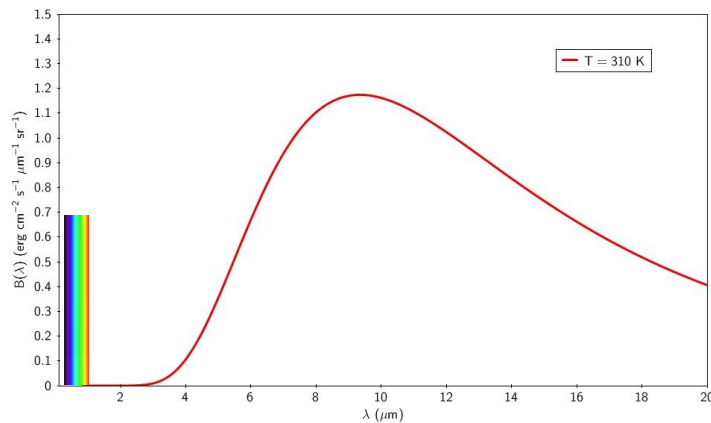
Questo grafico rappresenta la funzione di Planck per un corpo nero a quattro temperature diverse, crescenti dalla curva rossa a 1250 K fino alla curva blu a 2000 K. Il grafico dimostra lo spostamento del massimo di emissione verso lunghezze d'onda più corte all'aumentare della temperatura.



corpo umano

$$T = 37^{\circ}\text{C} = 310\text{ K}$$

$$\lambda_{\text{max}} \sim 9\text{ }\mu\text{m}$$



La funzione di Planck per un corpo nero che emette alla temperatura del corpo umano. Il massimo di emissione si ha a circa 9 micron, mentre al di sotto di 3 micron non c'è praticamente alcuna emissione. Infatti al buio una persona risulta invisibile, mentre diventa visibile con un sensore di luce infrarossa.

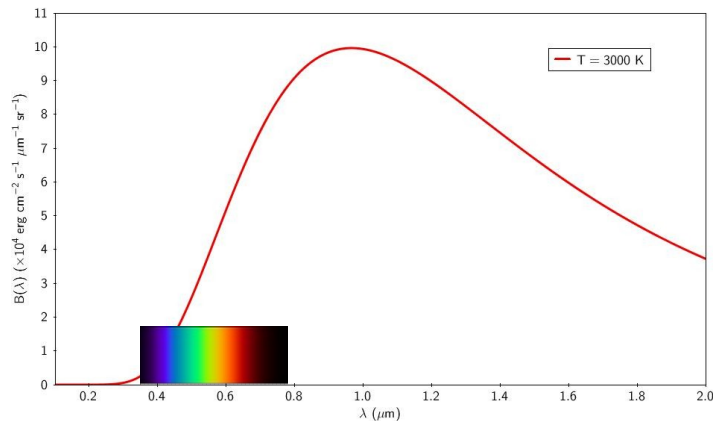
Le ordinate sono espresse in unità di 10^8 erg/cm³/s.



lampada a incandescenza

$T \sim 3000 \text{ K}$

$\lambda_{\text{max}} \sim 1 \mu\text{m}$



La funzione di Planck per un corpo nero che emette alla temperatura di una lampadina a incandescenza. Di nuovo, il massimo di emissione è collocato nell'infrarosso, eppure la lampadina emette luce visibile. Questo è possibile perché come si vede dal grafico la funzione si estende fino a 0.3 micron, includendo l'intervallo di lunghezza d'onda visibile. Quindi solo una frazione della radiazione globale emessa dalla lampadina è luce visibile.

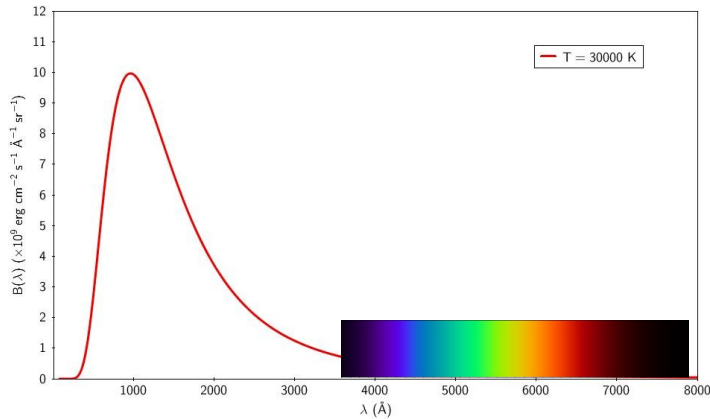
Le ordinate sono espresse in unità di $10^{13} \text{ erg/cm}^2/\text{s}$, valori centomila volte superiori a quelli del caso precedente.



stella blu

$T \sim 30000 \text{ K}$

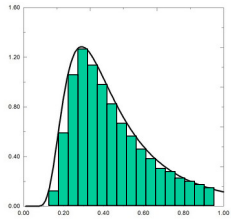
$\lambda_{\text{max}} \sim 1000 \text{ \AA}$



La funzione di Planck per un corpo nero che emette alla temperatura superficiale di una stella molto calda. Questa volta il massimo di emissione cade nell'ultravioletto. La stella risulta visibile ad occhio perché la funzione si estende fino all'infrarosso e oltre con emissione decrescente, ma pur sempre con valori molto alti.

Le ordinate sono espresse in unità di $10^{18} \text{ erg/cm}^2/\text{s}$, valori dieci miliardi di volte superiori a quelli del primo esempio.

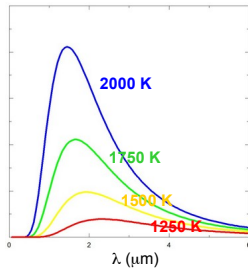
Legge di Stefan-Boltzmann



$$F_{\text{bol}} = 4\pi \int_0^{\infty} B(\lambda) d\lambda = \sigma T^4 \quad \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$$

costante di Stefan-Boltzmann

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-4}$$



All' **aumentare** della temperatura, l'energia totale emessa **cresce**, perché aumenta l'area totale sotto la curva.

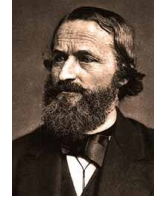
Abbiamo appena visto che all'aumentare di T non solo diminuisce il valore di λ_{max} , ma accade anche che la funzione di Planck assume valori con intensità rapidamente crescente. Se sommiamo i valori della funzione ad ogni lunghezza d'onda, otteniamo il flusso globale di energia, cioè la quantità di energia emessa dall'unità di superficie nell'unità di tempo. Questo è possibile calcolando l'integrale di $B(\lambda, T)$, che nel grafico è rappresentato tramite l'approssimazione dei rettangoli, e si ottiene una semplicissima soluzione, secondo cui il flusso è proporzionale alla quarta potenza della temperatura. Questo risultato è noto come legge di Stefan-Boltzmann.

Note storiche

Già nel XIX secolo i fisici tentavano di ricavare una teoria che fosse in grado di predire lo spettro della radiazione emessa da un corpo nero.

Gustav Robert Kirchoff (tedesco)	1824-1887
James Clerk Maxwell (scozzese)	1831-1879
Josef Stefan (sloveno)	1835-1893
John William Strutt Rayleigh (inglese)	1842-1919
Ludwig Boltzmann (austriaco)	1844-1906
Max Planck (tedesco)	1858-1947
Wilhelm Wien (tedesco)	1864-1928
James Jeans (inglese)	1877-1946

Nel 1860 **Kirchoff** dimostra che ad una determinata temperatura e per una determinata lunghezza d'onda, il rapporto tra il potere **emissivo** e quello d'**assorbimento** è una funzione universale indipendente dalla natura dei corpi.



$$\frac{e(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T)$$

Non conosce l'espressione
di questa funzione

Successivamente definisce **corpo nero perfetto** quello che assorbe tutta la radiazione incidente, qualunque sia la sua lunghezza d'onda.

$$a(\lambda, T) = 1$$



Nel 1879 **Stefan** ricava un'espressione per la potenza emessa da un corpo nero di temperatura T e superficie A sulla base di dati sperimentali (poco precisi) ottenuti con un filo di platino incandescente.

$$P = \sigma A T^4$$

dove P è in unità di energia per secondo (erg s^{-1}) e quindi corrisponde a F_{bol} calcolato prima moltiplicato per la superficie emittente (in cm^2).

Nel 1884 **Boltzmann** dimostra teoricamente la relazione di Stefan che diventa **legge di Stefan-Boltzmann**.





Tra il 1893 e il 1896 **Wilhelm Wien** riesce a dimostrare che la densità di energia all'interno di una cavità isoterma (realizzata per la prima volta nel 1895) è data dalla seguente espressione:

$$u(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

dove $u(\nu, T)$ è energia per unità di superficie, di tempo, di frequenza e angolo solido ($\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$).

Wien unisce la termodinamica all'elettromagnetismo e tratta la radiazione all'interno di una cavità in modo analogo a un **gas di particelle**. In particolare, applicando la distribuzione di **Maxwell-Boltzmann** delle velocità:

$$f(\nu) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \nu^2 e^{-\frac{m\nu^2}{2kT}}$$

e ottiene la formula: $u(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ **costante di Boltzmann**
 $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{erg K}^{-1}$

ma la sua teoria fallisce nel riprodurre i dati sperimentali alle grandi lunghezze d'onda...



Nel frattempo **Lord Rayleigh** e **James Jeans** ipotizzano che le pareti interne della cavità isoterma siano composte di particelle oscillanti per agitazione termica e che siano in grado di emettere onde elettromagnetiche a qualsiasi frequenza.

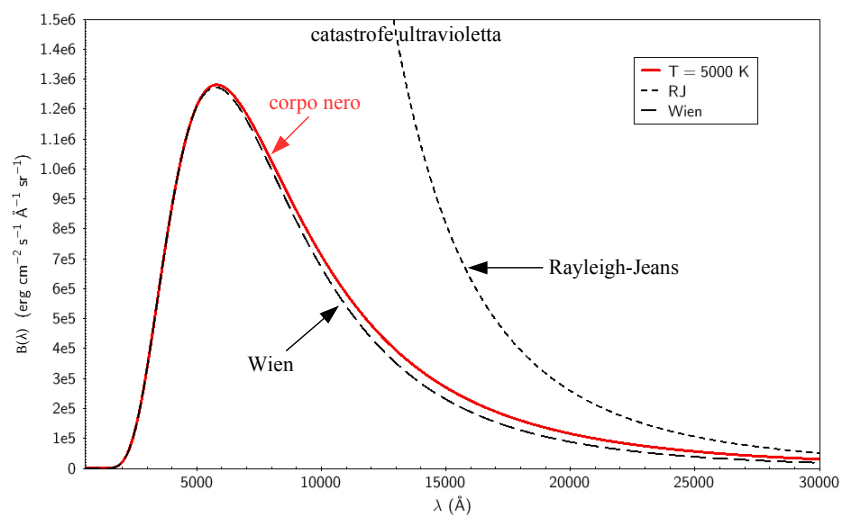


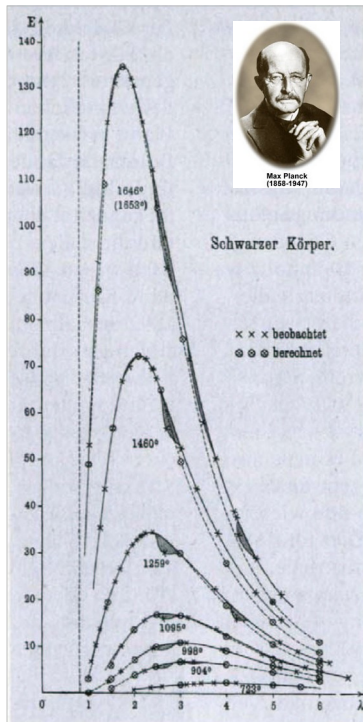
$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

dove ρ è energia per unità di volume e di frequenza e corrisponde a:

$$u(\nu, T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \quad (\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1})$$

Il loro risultato riproduce bene la curva di corpo nero alle grandi lunghezze d'onda, ma fallisce alle lunghezze d'onda corte e non mostra nessun massimo di emissione...





Nel 1900, Max Planck riesce a ricavare una formula che riproduce i valori osservati nello spettro del corpo nero.

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

$$B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad \text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Å}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

costante di Planck
 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s} = 6.626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B(\lambda) = \frac{2ckT}{\lambda^4} \quad \text{Rayleigh-Jeans}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \quad \text{Wien}$$

Spiegazione di Planck

Le pareti della cavità emittente sono fatte di particelle (**risonatori**), che **assorbendo** energia dall'esterno aumentano la loro **temperatura** e quindi la loro **energia cinetica**, iniziano ad oscillare ed emettono radiazione elettromagnetica alla frequenza della loro oscillazione.

I risonatori sono suddivisi in gruppi. Ogni gruppo emette energia totale E ed è composto da N risonatori a frequenza ν .

All'interno di ogni gruppo E è suddivisa in elementi **discreti** ϵ , chiamati **elementi di energia**, i quali devono essere proporzionali alla frequenza ν perché bisogna tenere conto della legge dello spostamento (Wien):

$$\lambda_{\max} \propto \frac{1}{T} \Rightarrow \nu_{\max} \propto T$$

Quindi: $\epsilon = h \nu$

Planck mette insieme:

- $\epsilon = h\nu$, che fu in seguito chiamata **ipotesi quantistica**
- il secondo principio della termodinamica, che mette in relazione energia e temperatura attraverso l'entropia
- l'approccio probabilistico di Boltzmann alla termodinamica, all'epoca considerato un metodo nuovo e ancora in discussione

e ricava così la formula:

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

"Assai meno comoda fu l'interpretazione della seconda costante universale della legge di radiazione, che io designai come quanto elementare di azione, perché rappresenta il prodotto di un'energia per un tempo (secondo il primo calcolo $6,55 \cdot 10^{-27}$ erg s).

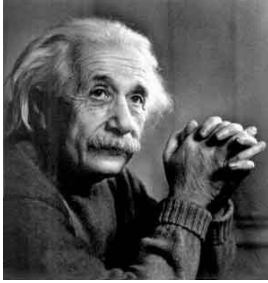
Mentre essa era assolutamente indispensabile [...] sorgevano delle gravi difficoltà quando si cercava di inquadrarla in qualche maniera nella teoria classica. Tutto andava bene finché si poteva considerare tale costante come infinitamente piccola, e cioè per grandi energie e lunghi periodi di tempo; ma nel caso generale c'era in qualche punto una lacuna che diventava tanto più incolmabile quanto più si passava ad oscillazioni piccole e veloci.

Il fallimento di ogni tentativo di colmare la lacuna presto non lasciò più dubbi: o il quanto di azione era una grandezza fittizia, ed allora tutta la deduzione della legge di irradiazione era illusoria in linea di principio e non rappresentava altro che un giochetto di formule senza contenuto; oppure la deduzione della legge di irradiazione poggiava su di un reale pensiero fisico, ed allora il quanto di azione doveva avere un'importanza fondamentale in fisica, ed annunciava qualche cosa completamente nuova ed inaudita che pareva intenzionata a rivoluzionare il nostro pensiero fisico basato, fin da quando Leibnitz e Newton avevano fondato il calcolo infinitesimale, sull'ipotesi della continuità di tutti i rapporti causali.

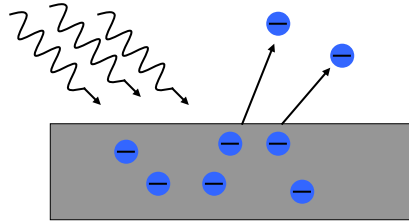
L'esperienza decise per la seconda alternativa. La rapida ed indubbia decisione non fu però dovuta al controllo della legge di distribuzione dell'energia della radiazione termica e tanto meno alla speciale deduzione che di questa legge io diedi, bensì ai lavori di quegli scienziati che si servirono del quanto di azione per le loro ricerche.

Il primo impulso in questo campo fu dato da Einstein, il quale fece notare che l'introduzione dei quanti di energia, presupponenti il quanto di azione, sembrava adatta a chiarire in modo semplice una serie di importanti osservazioni fatte sugli effetti della luce come l'emissione di elettroni [...]."

M. Planck, Nobel Lecture, Stoccolma 2 giugno 1920.



Nel 1905 Einstein conferma l'idea di Planck spiegando l'effetto fotoelettrico e mostrando che la radiazione non è solo emessa, ma anche assorbita sotto forma di pacchetti o **fotoni**, aventi ciascuno energia $E = h\nu$.

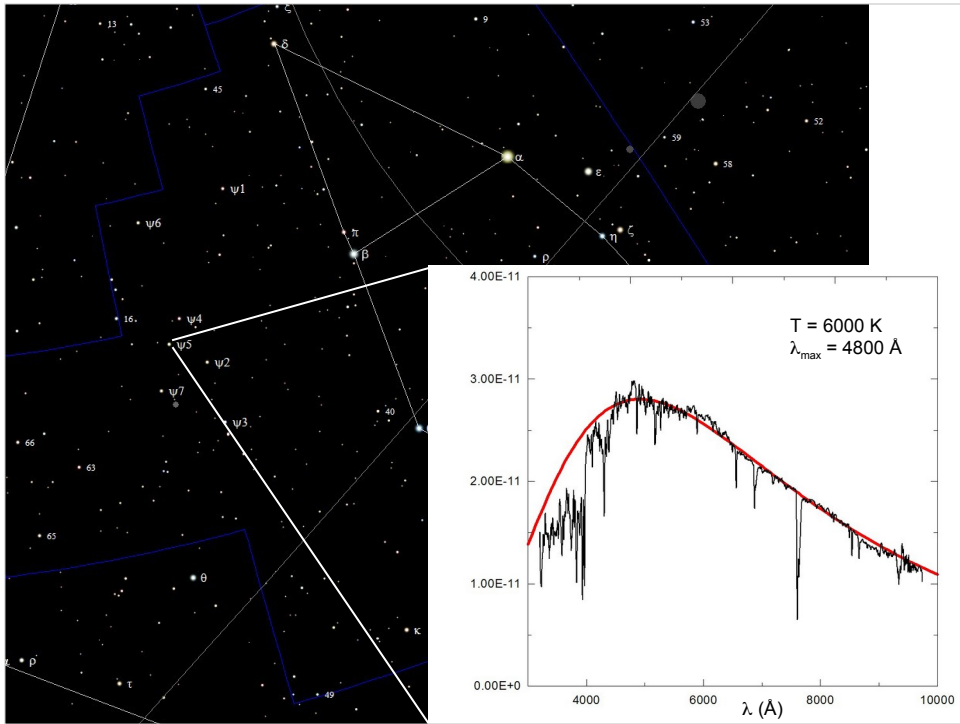


[...] Infatti mi sembra che le osservazioni compiutesi sulla radiazione di corpo nero, la fotoluminescenza, l'emissione di raggi catodici tramite luce ultravioletta ed altri gruppi di fenomeni relativi all'emissione ovvero alla trasformazione della luce, risultino molto più comprensibili se vengono considerate in base all'ipotesi che l'energia sia distribuita nello spazio in modo discontinuo.

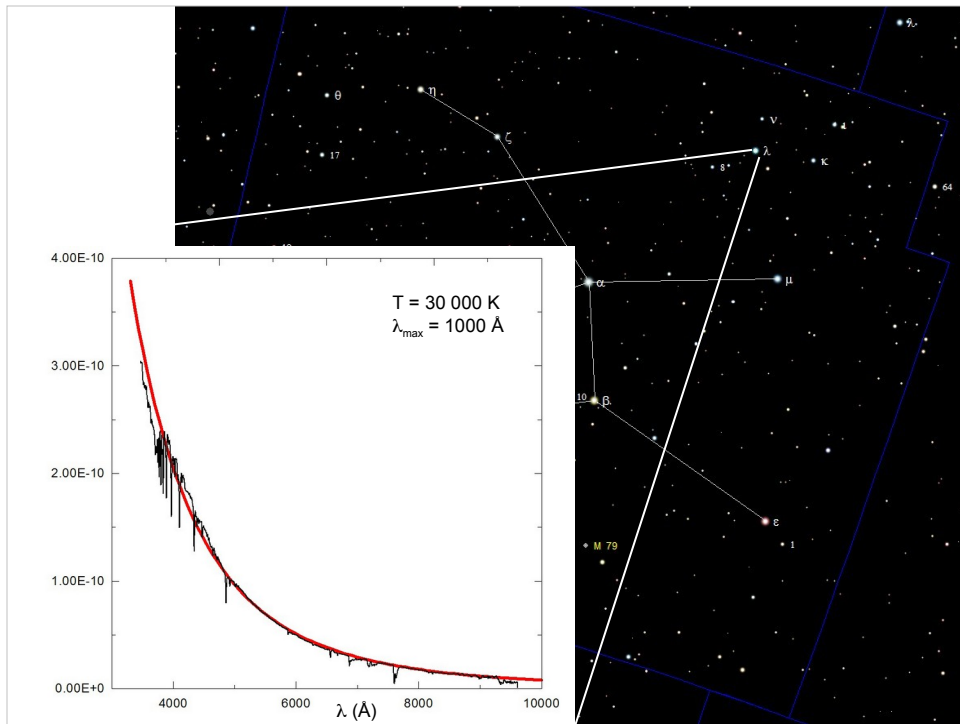
Einstein, 1905, *Su di un punto di vista euristico, concernente la produzione e la trasformazione della luce.*

Applicazioni astronomiche

Sorgente	Temperatura	λ_{max}	Regione spettrale
Fondo cosmico	3 K	1 mm	Infrarosso-radio
Nube molecolare	10 K	300 μm	Infrarosso
Sole	6000 K	4800 Å	Visibile
Stella calda	30 000 K	1000 Å	Ultravioletto
Gas intra-cluster	10^8 K	0.3 Å	Raggi X



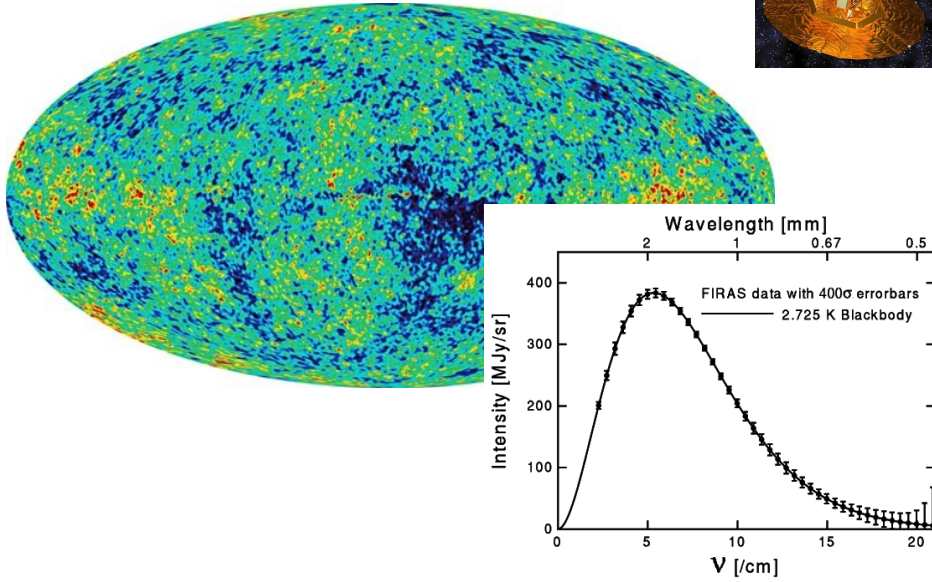
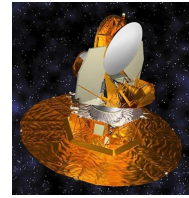
Esempio di stella con temperatura superficiale pari a 6000 K. Il grafico a destra rappresenta lo spettro della stella, cioè la distribuzione di energia alle varie lunghezze d'onda. La linea continua rossa è la funzione di Planck per un corpo nero di temperatura analoga. Il massimo di emissione di energia si ha a 4800 Å. La stella in questo esempio è molto simile al Sole.



Esempio analogo al precedente, ma per una stella con temperatura cinque volte maggiore. Il massimo di emissione non cade nell'intervallo del visibile, dove si osserva solo la “coda” a bassa energia della funzione di Planck.

WMAP

La radiazione di fondo cosmico



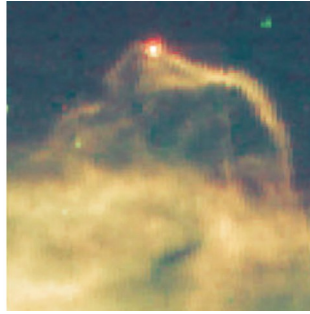
Una delle più importanti scoperte astronomiche, che è valsa il premio Nobel a Penzias e Wilson: la radiazione di fondo cosmico, cioè com'era l'universo ai suoi inizi.

Essa viene emessa ad una temperatura equivalente di 3 K e si osserva alle lunghezze d'onda millimetriche, dal lontano infrarosso al radio.

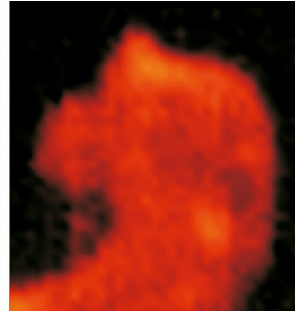
La nebulosa Testa di Cavallo



visibile



vicino infrarosso



radio

Esempi di sorgenti astronomiche presenti nella nostra Galassia: le nubi di gas molecolare (CO , H_2 , etc.). La loro temperatura è molto bassa, e questo le rende “oscuire” in luce visibile. Sono invece osservate in infrarosso e radio.

La galassia Vortice (M51)



Immagine di una galassia vicina in ultravioletto.

Osservare a queste lunghezze d'onda consente di mettere in evidenza le stelle più calde rispetto a quelle più fredde la cui emissione è spostata a lunghezze d'onda maggiori.